Estadística II
Tema 2. Conceptos básicos en el contraste de hipótesis

Curso 2010/11

Tema 2. Conceptos básicos en el contraste de hipótesis

Contenidos

- Definición de contraste e hipótesis estadística.
- Hipótesis nula y alternativa.
- Errores de tipo I y II.
- Función de potencia de un contraste.
- Definición de p-valor y conclusiones de un contraste.
- Metodología del contraste de hipótesis.

Tema 2. Conceptos básicos en el contraste de hipótesis

Objetivos de aprendizaje

- Conocer los conceptos básicos en el contraste de hipótesis.
- Saber formular la hipótesis nula y alternativa de un contraste.
- Saber Interpretar los resultados de un contraste basándose en el p-valor del mismo.

Referencias en la bibliografía

- Meyer, P. "Probabilidad y aplicaciones estadísticas" (1992)
  - Capítulo 15
- Newbold, P. "Estadística para los negocios y la economía" (1997)
  - Capítulo 9
- Peña, "Regresión y análisis de experimentos" (2005)
  - Capítulo 10

Contrastes de hipótesis

En estadística, el contraste de hipótesis tiene la finalidad de decidir si una determinada hipótesis sobre la distribución en estudio es confirmada o invalidada a partir de las observaciones de una muestra.

Contraste de hipótesis

Ejemplos de hipótesis

- Las próximas elecciones municipales en Getafe otorgará dos escaños al partido "Vientos de Pueblo". Los partidos políticos quieren contrastar esa afirmación para posibles pactos pre–electorales Cómo?

- Una compañía recibe un gran cargamento de piezas. Sólo acepta el envío si no hay más de un 5 % de piezas defectuosa. Cómo tomar una decisión sin verificar todas las piezas?

- Un investigador quiere saber si una propuesta de reforma fiscal es acogida de igual forma por hombres y mujeres Cómo puede verificar esa conjetura?

Contraste de hipótesis

Ejemplos de hipótesis (cont.):

Estos ejemplos tienen algo en común:

a) Se formula la hipótesis sobre la población.

b) Las conclusiones sobre la validez de la hipótesis se basarán en la información de una muestra.

Hipótesis nula y alternativa

Se denomina **hipótesis nula** H_0 , a la hipótesis que se desea contrastar. El nombre de nula indica que H_0, representa la hipótesis que mantendremos a no ser que los datos indiquen su falsedad, y puede entenderse, por tanto, en el sentido de neutra. La hipótesis H_0, nunca se considera probada, aunque puede ser rechazada por los datos.

Hipótesis nula y alternativa

El enfoque actual considera siempre una **hipótesis alternativa** a la hipótesis nula. De manera explícita o implícita, la hipótesis nula, se enfrenta a otra hipótesis que denominaremos hipótesis alternativa y que se denota H_1,. En los casos en los que no se especifica H_1, de manera explícita, podemos considerar que ha quedado definida implícitamente como H_0, es falsa.

Hipótesis nula y alternativa

Ejemplo Se tienen dos monedas, una correcta (es decir la probabilidad de cara/cruz es $1/2$) y una trucada (con probabilidad de cara igual a $3/4$). Se decide jugar con una de las dos monedas seleccionada al azar, pero antes de empezar a jugar se permite realizar un experimento de dos tiradas. El objetivo es contrastar la hipótesis (H_0) de $p = 1/2$.

Hipótesis nula y alternativa

(**a**) Escriba el espacio muestral:

$$\mathcal{X} = \{(c, c), (c, x), (x, c), (x, x)\}.$$

(**b**) ¿Cuál(es) resultado(s) le harían pensar que la hipótesis es falsa?

$$R = \{(c, c)\}.$$

(**c**) Si decide rechazar H_0 si se observa R, ¿qué errores puede cometer? Calcule la probabilidad de cada error.

Error	Descripción	Probabilidad
Tipo I	Rechazar H_0 cuando es cierta	$(1/2)^2$
Tipo II	Aceptar H_0 cuando es falsa	$1 - (3/4)^2$

Hipótesis nula y alternativa

Definición

Un **contraste de hipótesis** *es cualquier partición del espacio muestral, $\mathcal{X}$, en dos regiones disjuntas: una región crítica o de rechazo, R, y una región de aceptación $R^c = \mathcal{X} \setminus R$.*

Hipótesis nula y alternativa

(**d**) Teniendo en cuenta el apartado (**b**). Proponga un contraste de hipótesis para $H_0 : p = 1/2$.

$$\mathcal{X} = R \cup R^c = \{(c,c)\} \cup \{(c,x),(x,c),(x,x)\}.$$

(**e**) Proponga otro contraste.

$$\mathcal{X} = R_* \cup R_*^c = \emptyset \cup \{(c,c),(x,c),(x,c),(x,x)\}.$$

(**f**) Calcule las probabilidades de cada tipo de error para el contraste propuesto en (**e**).

Error	Descripción	Probabilidad
Tipo I	Rechazar H_0 cuando es cierta	0
Tipo II	Aceptar H_0 cuando es falsa	1

Hipótesis nula y alternativa

Tipos de hipótesis

- Hipótesis simple: $H_0 : \theta = \theta_0$.
- Hipótesis compuesta: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ y Θ_0 tiene más de un elemento.
  - Hipótesis unilaterales:
    - $H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_A : \theta > \theta_0$.
    - $H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad vs \quad H_A : \theta < \theta_0$.
  - Hipótesis bilaterales:
    - $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_A : \theta \neq \theta_0$.
    - $H_0 : \theta \in [\theta_1, \theta_2] \quad vs \quad H_A : \theta \notin [\theta_1, \theta_2]$.

Hipótesis nula y alternativa

Tipos de hipótesis

Ejemplo

- Hipótesis simple vs simple: $H_0 : p = 1/2 \quad vs \quad H_A : p = 3/4$.
- Hipótesis unilaterales: $\left\{ \begin{array}{lll} H_0 : p \leq 1/2 & vs & H_A : p > 1/2 \\ H_0 : p \geq 1/2 & vs & H_A : p < 1/2 \end{array} \right.$.
- Hipótesis bilaterales: $H_0 : p = 1/2 \quad vs \quad H_A : p \neq 1/2$.

Hipótesis nula y alternativa

Ejemplo

- Las próximas elecciones municipales en Getafe otorgará dos escaños al partido "Vientos de Pueblo". Los partidos políticos quieren contrastar esa afirmación para posibles pactos pre–electorales.
  $\boxed{H_0 : NE = 2 \quad vs \quad NE \neq 2}$.

- Una compañía recibe un gran cargamento de piezas. Sólo acepta el envío si no hay más de un 5 % de piezas defectuosas.
  $\boxed{H_0 : p \leq 0{,}05 \quad vs \quad H_A : p > 0{,}05}$.

- Un investigador quiere saber si una propuesta de reforma fiscal es acogida de igual forma por hombres y mujeres.
  $\boxed{H_0 : p_H = p_M \quad vs \quad H_A : p_H \neq p_M}$.

Metodología del contraste- Error tipo I

- Fijar, en función de las hipótesis y del contexto del problema, una cota para la probabilidad de cometer el error de tipo I, que denominamos **nivel de significación del contraste**, α.
- Excluir todos los contrastes cuya región crítica, R, no satisfaga la condición:

$$\Pr\{R|H_0\} \leq \alpha$$

- Entre los contrastes no excluidos, seleccionar el contraste que **minimice** la probabilidad del error de tipo II.

Neyman–Pearson

Metodología del contraste - Función de potencia

Si las hipótesis pueden expresarse en términos de un parámetro, $\theta \in \Theta$, esto es si $H_0 : \theta \in \Theta_0$ y $H_A : \theta \in \Theta_A$, se denomina **función de potencia del contraste** con región crítica R, a la probabilidad de rechazar H_0 si el valor del parámetro es θ:

$$\beta(\theta) = \Pr\{R|\theta\}.$$

Observación 1: Un contraste tiene nivel α si $\beta(\theta) \leq \alpha$ para $\theta \in \Theta_0$.
Observación 2: Cuando $\theta \in \Theta_A$, la probabilidad del error de tipo II es: $1 - \beta(\theta)$.

Ejemplo

(**i**) Suponga que en lugar de dos monedas tenemos un "continuo" de monedas con probabilidad p de cara. Calcule la función de potencia del contraste con región crítica $R = \{(c, c)\}$.

Metodología del contraste

En un problema (paramétrico) donde las hipótesis pueden expresarse en términos de un parámetro, $H_0 : \theta \in \Theta_0$ y $H_A : \theta \in \Theta_A$:

1. Fijar, en función de las hipótesis y del contexto del problema, el **nivel de significación del contraste**, α.
2. Excluir todos los contrastes cuya región crítica, R, no satisfaga la condición:
$$\Pr\{R|\theta\} \leq \alpha,$$
para todo $\theta \in \Theta_0$.
3. Entre los contrastes no excluidos, seleccionar el contraste que **maximice** la función de potencia en $\theta \in \Theta_A$.

$\boxed{\text{Probabilidad del error de tipo II} = 1 - \beta(\theta)}$

Metodología del contraste

1. En el contraste de hipótesis se prima a la hipótesis nula (*neutra*).
2. Podemos hacer la probabilidad del error de tipo I tan pequeña como queramos, PERO esto hace que aumente la probabilidad del error de tipo II.
3. Un contraste de hipótesis puede rechazar la hipótesis nula.
4. Un contraste de hipótesis NO puede probar la hipótesis nula.
5. Si aceptamos la hipótesis nula, debe interpretarse como que las observaciones no han aportado evidencia para descartarla.
6. Por el contrario, si rechazamos la hipótesis nula es porque se está razonablemente seguro ($\Pr(R|H_0) \leq \alpha$) de que H_0 es falsa y estamos aceptando implícitamente la hipótesis alternativa.

Nivel crítico p (o p-valor)

Definición

El **nivel crítico** ***p*** *(o p–valor) es el nivel de significación más pequeño para el que la muestra obtenida obligaría a rechazar la hipótesis nula.*

- El p-valor es la probabilidad (calculada bajo H_0) de obtener un resultado que sea menos compatible con H_0 que el resultado obtenido con la muestra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- El p-valor depende de la muestra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Puede considerarse como el apoyo que la hipótesis nula recibe de las observaciones de la muestra:
  - Si el p-valor es **menor** que el nivel de significación prefijado, el apoyo a H_0 es escaso y por tanto H_0 debe rechazarse.
  - Si el p-valor es **mayor** que el nivel de significación prefijado, el apoyo a H_0 es suficiente y por tanto H_0 no debe rechazarse.

Nivel crítico p (o p-valor)

Cálculo del nivel crítico

- Contraste unilateral por la derecha: $H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_A : \theta > \theta_0$
  - Valor observado del estadístico de contraste: $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t$.
  - Región crítica: $R = \{T(x_1, x_2, \ldots, x_n) > k\}$.
  - p-valor $= \Pr(T \geq t \,|\theta = \theta_0)$.
- Contraste unilateral por la izquierda: $H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad vs \quad H_A : \theta < \theta_0$
  - Valor observado del estadístico de contraste: $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t$.
  - Región crítica: $R = \{T(x_1, x_2, \ldots, x_n) < k\}$.
  - p-valor $= \Pr(T \leq t \,|\theta = \theta_0)$.

Nivel crítico p (o p-valor)

Cálculo del nivel crítico

- Contraste bilateral: $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_A : \theta \neq \theta_0$
  - Valor observado del estadístico de contraste: $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t$.
  - Región crítica:
    $R = \{T(x_1, x_2, \ldots, x_n) < k_1\} \cup \{T(x_1, x_2, \ldots, x_n) > k_2\}$.
  - p-valor $= \text{mín}\left(2\Pr(T \leq t \,|\theta = \theta_0); 2\Pr(T \geq t \,|\theta = \theta_0)\right)$.

Nivel crítico p (o p-valor)

Ejemplo

Sea X la variable "rentabilidad de cierto tipo de fondos de inversión tras una apreciación fuerte del marco con respecto al dólar". Se considera que la media de esta variable es 15. Un economista afirma que dicha rentabilidad media ha variado, por lo que lleva a cabo un estudio en las condiciones reseñadas anteriormente sobre una muestra de 9 fondos cuya media muestral resulta ser de 15,308 y cuya varianza muestral corregida (cuasivarianza) es 0,193.

a) Especificando las hipótesis necesarias, contrastar la afirmación del economista al 5 %.

b) A partir del resultado de **a)**, razonar si el intervalo de confianza para la media (centrado en $\overline{x}$) al 95 % contendrá o no al valor 15.

c) Acotar el p-valor. Si el contraste se hubiera realizado al 10 %, ¿aceptaríamos la hipótesis de que la media de la rentabilidad es 15 tras una apreciación fuerte del marco

Nivel crítico p (o p-valor)

a) Hipótesis asumidas: $X_1, ..., X_n$ es una m.a.s. de una población $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$H_0 : \mu = 15 \qquad vs \qquad H_1 : \mu \neq 15$$

Rechazaremos H_0 a nivel del 5 % si $\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}}\right| > t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$

Tenemos que $\left|\frac{15{,}308-15}{\frac{0{,}44}{\sqrt{9}}}\right| = 2{,}1 \; > \; t_{8;0{,}025} = 2{,}306. \Rightarrow \boxed{¿?}$

b) Por la dualidad intervalos de confianza-contrastes de hipótesis, 15 (valor del parámetro apuntado en H_0) ha de pertenecer al intervalo de confianza descrito en el enunciado.

c) p-valor $= 2P\left(t_8 > 2{,}1\right)$.

p-valor $\in (0{,}05, 0{,}1)$, entonces con $\alpha = 0{,}1$ rechazaríamos H_0.

Contraste de hipótesis en una población normal

Contrastes sobre μ:

$H_0 : \mu = \mu_0$ (σ conocida); $R = \left\{ |\bar{x} - \mu_0| > z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$

$H_0 : \mu = \mu_0$ (σ desconocida); $R = \left\{ |\bar{x} - \mu_0| > t_{n-1;\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right\}$

$H_0 : \mu \leq \mu_0$ (σ conocida); $R = \left\{ \bar{x} - \mu_0 > z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$

$H_0 : \mu \leq \mu_0$ (σ desconocida); $R = \left\{ \bar{x} - \mu_0 > t_{n-1;\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} \right\}$

$H_0 : \mu \geq \mu_0$ (σ conocida); $R = \left\{ \bar{x} - \mu_0 < z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$

$H_0 : \mu \geq \mu_0$ (σ desconocida); $R = \left\{ \bar{x} - \mu_0 < t_{n-1;1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} \right\}$

Contraste de hipótesis en una población normal

Contrastes sobre σ:

$$H_0 : \sigma = \sigma_0; \qquad R = \left\{ \frac{n-1}{\sigma_0^2} s^2 \notin \left[\chi^2_{n-1;1-\alpha/2} \ , \ \chi^2_{n-1;\alpha/2} \right] \right\}$$

$$H_0 : \sigma \leq \sigma_0; \qquad R = \left\{ \frac{n-1}{\sigma_0^2} s^2 > \chi^2_{n-1;\alpha} \right\}$$

$$H_0 : \sigma \geq \sigma_0; \qquad R = \left\{ \frac{n-1}{\sigma_0^2} s^2 < \chi^2_{n-1;1-\alpha} \right\}$$

Contrastes sobre proporciones

$$H_0 : p = p_0; \qquad R = \left\{ |\bar{x} - p_0| > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$$

$$H_0 : p \leq p_0; \qquad R = \left\{ \bar{x} - p_0 > z_{\alpha} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$$

$$H_0 : p \geq p_0; \qquad R = \left\{ \bar{x} - p_0 < z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$$