

TEMA 6: Variables aleatorias

Examen Junio 2003.- La función de distribución de una variable continua X es de la forma:

$$F(t) = P(X \leq t) = a + bt - ct^3 \quad t \in [-1, 1]$$

Se sabe que la densidad verifica $f(-1)=f(1)=0$.

- a) Enunciar las propiedades de la función de densidad y de la función de distribución
- b) Determinar a , b y c .
- c) Calcular la media y la varianza de X . Si no se ha obtenido en 2) el valor de a , b y c , expresar el valor de la media y la varianza en términos de a , b y c .

Examen Septiembre 2003.- Un asesor financiero ha estimado que las ventas y los costes de algunos productos están relacionados con un índice I a través de las siguientes relaciones:

$$\text{Costes : } C = \frac{I+5}{7} \quad \text{Ventas : } V = \frac{25-I}{4}$$

Si el índice I es una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{x}{108} & 3 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- a) Calcular la función de distribución del índice I .
- b) Calcular las medias y desviaciones de los costes, las ventas y los beneficios.
- c) Calcular la probabilidad de que el beneficio sea negativo.

Examen Junio 2002.- Los beneficios de una empresa se comportan según la siguiente función :

$$B = 0,2 X - 500$$

La variable aleatoria X expresa el número de unidades vendidas del producto que fabrica la empresa. Esta variable se distribuye según la función:

$$f(x) = \frac{1}{5000} \quad 2000 \leq x \leq 7000$$

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el beneficio sea igual o mayor que 100 unidades?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de tener pérdidas?
- c) ¿Cuál es el beneficio medio esperado?

- d) ¿Entre qué valores se encontrará el número de unidades vendidas si queremos tener garantizada una probabilidad de 0,5 para un beneficio mayor que b?

Examen Septiembre 2002.- La proporción de estudiantes universitarios que utilizan el metro para desplazarse diariamente es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Obtener el valor de k.
- ¿Cuál es la proporción esperada de estudiantes que utilizan el metro diariamente?
- ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado día, como mucho la mitad de los estudiantes hayan utilizado el metro?

Examen Junio 2001.- La demanda mensual X en millones de pesetas de un artículo viene dada por la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde x viene expresado en millones de unidades. Se pide:

- Encontrar la función de distribución de la variable aleatoria X.
- Calcular la probabilidad de que el número de unidades demandadas en un mes no superen al millón y medio.
- ¿Qué cantidad deberá tenerse dispuesta a la venta al comienzo de cada mes para poder satisfacer plenamente la demanda en dicho periodo con una probabilidad de 0,5?

Examen Septiembre 2001.- El desgaste en milímetros (mm) del relieve de un neumático es una variable aleatoria X que puede tomar valores 1,2,3 y 4 mm. Se sabe que el relieve de una rueda nueva es de 4 mm, por lo tanto, el máximo desgaste que puede tener es de 4 mm. La función de masa de la variable aleatoria X es la siguiente:

$$P_x(x) = P(X = x) = \begin{cases} m & \text{si } x = 1 \\ \frac{mx}{3} & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 3 \\ \frac{mx}{12} & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

- Calcular m .
- Hallar la función de distribución del desgaste de un neumático y dibujarla.
- Si el desgaste del relieve del neumático es considerable, ha de cambiarse la rueda. Se ofrece una subvención de 1.000 pts por mm no desgastado. Calcular el coste esperado de una nueva rueda, sabiendo que en el mercado una rueda vale 10.000 pesetas.
- Se pone en vigor una nueva normativa de forma que si el desgaste de los neumáticos es mayor a una cantidad k , ha de cambiarse dicha rueda. Calcular k tal que la probabilidad de que un individuo tenga que cambiar las cuatro ruedas sea como mucho 0,1.

Examen Junio 2000.- La revalorización, en tanto por uno, de un activo financiero en un año está distribuida como una variable X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Representar la función de densidad y calcular el valor esperado y la varianza.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el activo no pierda más de la mitad de su valor?
- Si un agente tiene una cartera de diez activos, cuyas revalorizaciones en un año son independientes y están idénticamente distribuidas como X , ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los diez activos se deprecie?

Examen Septiembre 1999.- Consideramos una variable aleatoria en $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$.

- ¿Cuáles son las propiedades de la función de densidad?
- Dada la función de distribución:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x}{6} - \frac{1}{3} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

- Determina a y b .
- Calcula la función de densidad
- Halla $P(X = 5)$ y $P(4 \leq X \leq 10)$.
- Calcula la media y la varianza de X .

Examen Septiembre 1998.- El dueño de un kiosco compra un a revista semanal a 90 pts la copia y la vende a 150 pts la copia. La función de probabilidad de la demanda semanal de dada revista está dad por:

Demanda	9	10	11	12
Probabilidad	0,20	0,15	0,35	0,30

- Calcular la media y desviación típica de la demanda total en cuatro semanas, suponiendo que existe independencia entre las demandas de semanas distintas.
- Hallar la función de probabilidad del beneficio neto semanal obtenido con esta revista si el dueño del kiosco compra 11 copias cada semana. ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda exceda el número de copias que ha comprado?
- Probar que siempre se verifica la igualdad siguiente:

$$s_x^2 = E(x^2) - m_x^2$$

$$\text{siendo } s_x^2 = E(x - m_x)^2 \quad \text{y} \quad m_x = E(x)$$

Examen Junio 1997.- La duración en horas de las clases que se imparten en cierto centro es una variable aleatoria con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x - x^2) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- Hallar el valor de α y la duración media de las clases.
- Un alumno que tiene que realizar una importante llamada a las doce y media, acude una mañana a una clase que comienza a las doce. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que interrumpir la clase para realizar la llamada?
- Otra de las clases de ese día comienza a las cinco de la tarde. Si se sabe que a las cinco y cuarto el grupo seguía dentro del aula, ¿Cuál es la probabilidad de que a las seis menos cuarto ya hayan terminado?
- En una mañana se impartieron un total de 12 clases, ¿cuál es la probabilidad de que alguna de ellas durase menos de una cuarto de hora?

Examen Junio 1997.- Un estudiante de economía decidió el pasado mes de junio dedicar su tiempo libre a hacer Declaraciones de la Rente para otras personas. El número de clientes atendidos por semana es una variable aleatoria con la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,06 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0,16 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,60 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- Calcula y dibuja la función de masa (o de probabilidad)
- ¿Cuál es la probabilidad de que este estudiante atienda algún cliente en una semana? Si sabemos que ha atendido alguno, ¿cuál es la probabilidad de que haya atendido más de dos?
- Calcula el número de clientes que este estudiante espera atender en una semana.
- Si cobra 5000 pesetas a cada cliente, ¿cuál es la ganancia esperada en cuatro semanas?

Examen Septiembre 1996.- El porcentaje de aditivos de una gasolina determina su precio. La variable aleatoria X , que expresa dicho porcentaje, tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Si $X < 0,5$, la gasolina se vende a 70 pesetas por litro, mientras que si $X \geq 0,5$, se vende a 90 pesetas por litro.

- Hallar la función de distribución de la variable X .
- Calcular el valor esperado de X .
- ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje de aditivos esté entre el 25 y el 75%?
- Calcular el precio esperado por litro de gasolina.

Examen Junio 1995.- En el proceso de elaboración de una conocida marca de cerveza, se sabe que la cantidad de cerveza contenida en un botellín de 20cl, viene dada por una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-19) & \text{si } 19 < x < 20 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Se pide:

- Calcular la probabilidad de que los botellines contengan entre 19 y 20 cl.
- Calcular la media y la varianza de la cantidad de cerveza contenida en un botellín.
- Se consideran aceptables para la venta los botellines que contienen más de 19,5 cl. Hallar la probabilidad de que, dado que un botellín es aceptable, contenga más de 20 cl.

Examen Septiembre 1995.- El número de veces a la semana que un proveedor surte a unos grandes almacenes viene dado por una variable aleatoria X cuya función de probabilidad es:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

Se pide:

- Calcular y dibujar la función de distribución de la variable aleatoria X.
- Calcular la media y la varianza del número de veces semanal que el proveedor surte a los grandes almacenes.
- Supongamos que hay seis proveedores cuyo número de visitas semanales sigue la misma distribución que X. Calcular la probabilidad de que exactamente tres de ellos vayan a los grandes almacenes menos de 10 veces por semana.

Examen Septiembre 1994.- Una variable aleatoria X tiene como función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

Se pide:

- Dibujar la función de distribución de X. ¿Es una variable aleatoria continua o discreta? ¿por qué?
- Calcular la función de masa (o función de probabilidad) de X.
- Calcular la media y la desviación típica de X.
- Se define una nueva variable $Y = 4 - 2X$. Calcular la media y la desviación típica de Y.

Examen Septiembre 1994.- Sea una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Se pide:

- Hallar el valor de k.
- Hallar la función de distribución y representarla gráficamente.
- Calcular la media y la varianza de la variable X.
- Calcular $P(0,5 \leq X \leq 1)$.