

## LEC/LADE/LECD/LADED

### HOJA DE PROBLEMAS 1 DISTRIBUCIONES EN EL MUESTREO

1. El encargado de una sala de cine está interesado en conocer la edad de su clientela. Para ello, decide preguntar las edades a 10 clientes seleccionados al azar. Suponiendo que la muestra es aleatoria simple y que la edad de los clientes (expresada en años) es una variable aleatoria,  $X$ , Normal, con media  $\mu = 22$  y desviación típica  $\sigma = 3$ , se pide:
  - a) Deducir las expresiones del valor esperado y la varianza de la media de las edades de los 10 clientes de la muestra, es decir, calcular  $E(\bar{X})$  y  $V(\bar{X})$ .
  - b) Calcular valor esperado de la varianza ( $\hat{\sigma}^2$ ) y la cuasivarianza (o varianza corregida) ( $s^2$ ) de las edades de los clientes de la muestra, es decir, calcular  $E(\hat{\sigma}^2)$  y  $E(s^2)$ . ¿Es posible obtener el mismo valor?
  - c) Supongamos que el encargado decide aumentar el tamaño de la muestra a 100 personas. Determinar,
    - (i) La distribución de probabilidad de la media de las edades de los 100 clientes, razonando la respuesta. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha media sea inferior a 25 años?
    - (ii) La probabilidad de que la edad de un determinado cliente no llegue a 25 años.
    - (iii) La probabilidad de que la cuasidesviación típica (o desviación típica corregida),  $s$ , supere los 4 años.
2. Un economista piensa que el incremento salarial de los empleados del sector bancario sigue una distribución normal con desviación típica 3.37. Se toma una muestra aleatoria de 16 empleados del sector.
  - a) Hallar la probabilidad de que la desviación típica muestral sea menor que 1.99.
  - b) Hallar la probabilidad de que la desviación típica muestral sea mayor que 2.89.
3. En ciertas unidades monetarias, el ahorro de un estudiante de Economía es una variable aleatoria normal de media  $\mu = 3.5$  y desviación típica  $\sigma = 0.5$ . Se seleccionan  $n = 16$  estudiantes al azar. Sea  $\bar{X}$  la media muestral de los ahorros observados.
  - a) ¿Cuál es la distribución de  $\bar{X}$ ? Razonar si se trata de una distribución exacta o aproximada.

- b) Calcular la probabilidad de que  $\bar{X}$  exceda de 3.7.
  - c) Calcular la probabilidad de que  $\bar{X}$  esté entre 3.34 y 3.36.
4. Se desea analizar la diferencia en el precio medio (en euros/m<sup>2</sup>) de la vivienda de nueva construcción en las ciudades de Madrid y Barcelona. Suponga que el precio de vivienda en Madrid (X) sigue una distribución normal con media  $\mu_x$  y varianza  $\sigma_x^2$  y que el precio de la vivienda en Barcelona (Y) sigue también una distribución normal, en este caso, con media  $\mu_y$  y varianza  $\sigma_y^2$ .

Para analizar la diferencia de medias ( $\mu_x - \mu_y$ ) se dispone de dos muestras aleatorias independientes de tamaño  $n_x$  y  $n_y$ , respectivamente. Se pide:

- (a) Obtener razonadamente la media, la varianza y la distribución de  $\bar{X} - \bar{Y}$ .
  - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que, dadas las correspondientes muestras, la diferencia de medias muestrales sea mayor que la diferencia  $\mu_x - \mu_y$ ? Justifique los pasos que dé.
5. El tiempo que un trabajador necesita para completar cierta tarea tiene media de 50 minutos y desviación típica de 8 minutos. Un supervisor registra los tiempos empleados por 60 trabajadores para completar la tarea.
- a) Calcular la probabilidad de que el tiempo muestral medio sea mayor de 52 minutos.
  - b) El tiempo muestral medio obtenido es 53 minutos. ¿ Tiene el supervisor razones para pensar que el tiempo necesario para completar la tarea está aumentando ?
6. Supongamos que la desviación típica de la cantidad de dinero que un estudiante gasta en un semestre en libros es 3000 pesetas. Se toma una muestra aleatoria de 100 estudiantes para estimar el gasto medio de toda la población.
- a) ¿Cuál es el desviación típica de la media muestral?.
  - b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral exceda de la media poblacional en más de 200 pesetas?.
  - c) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral resulte al menos 300 pesetas menor que la media poblacional?.
  - d) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en más de 400 pesetas?
- 7.
- a) Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria simple extraída de una población con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ .

Demostrar que  $E[\bar{X}] = \mu$  y  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

- b) Examinados los incrementos salariales de los altos ejecutivos de un amplio grupo de empresas se observa que tienen una distribución normal de media 12,1% y desviación típica 3,5%. Se toma una muestra aleatoria de 16 observaciones de la población de incrementos salariales.
- b.1) ¿Cuál es el error estándar (desviación típica) de la media muestral de incrementos salariales?
- b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea igual o inferior al 10%?
- b.3) ¿Cuál es la probabilidad de que la desviación típica muestral sea superior a 4,52 %?
8. Se sabe que la variable aleatoria  $X =$  edad en la audiencia de un programa de TV, sigue una distribución normal de media  $\mu = 20$  y desviación típica  $\sigma = 3$ . Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100 de personas que ven el programa y se pide:
- a) Probabilidad de que la media de edad de los encuestados supere los 25 años. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de los encuestados sea exactamente igual a 21 años?
- b) Se sabe que el 10% de las personas que ven el programa son de Madrid. Calcular la probabilidad de que haya menos de un 8% de madrileños en la muestra escogida.
- c) En el supuesto de que la media de la distribución fuese desconocida, se considera el estimador  $\hat{\mu} = \frac{X_1 + X_{100}}{2}$  para la media. Calcular la eficiencia relativa de la media muestral,  $\bar{X}$ , respecto del estimador propuesto,  $\hat{\mu}$ . ¿Qué conclusión se puede obtener?